RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.
Estratto dal vol. XXI, serie 5ª, 1º sem., fasc. 6º. — Seduta del 17 marzo 1912.

SUL PRINCIPIO DI RECIPROCITÀ

NOTA

DI

G. COLONNETTI

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI
1912

Meccanica. — *Sul principio di reciprocità*. Nota di Gustavo Colonnetti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Il teorema che qui mi propongo di esporre può, sotto un certo aspetto, considerarsi come una particolare forma, nuova s'io non m'inganno, di quel principio di reciprocità che occupa meritatamente, nella teoria dell'elasticità, uno dei più cospicui posti, sia per l'elegante semplicità che gli è caratteristica, sia ancora per la meravigliosa abbondanza dei problemi nei quali esso trova utile applicazione.

Sotto questa nuova sua forma, esso riduce, in ogni caso, il problema della ricerca delle caratteristiche della sollecitazione relativa ad una data sezione di un sistema elastico (ovvero della reazione di un dato suo vincolo) prodotta da una qualsiasi condizione di carico, al problema, sempre più semplice, dell'analisi delle variazioni di configurazione di cui lo stesso sistema divien suscettibile dopo che in esso siasi praticato un conveniente taglio; applicato al caso di un'unica forza esterna concentrata ed unitaria, esso potrebbe assumersi come la logica base di tutta quanta la teoria dei diagrammi d'influenza delle tensioni elastiche.

A questa teoria le cui varie parti vengon di solito trattate coi metodi i più disparati, esso potrebbe conferire quella medesima omogeneità e semplicità che, nella teoria dei diagrammi d'influenza delle deformazioni, si ottiene mediante l'applicazione diretta del noto e geniale enunciato che, dello stesso principio, venne dato dal Maxwell.

In un qualsiasi sistema elastico, comunque vincolato, in equilibrio sotto l'azione di forze date, si può sempre immaginare praticato un taglio in modo

affatto arbitrario senza che perciò venga ad essere in alcun modo alterato lo stato di equilibrio, purchè alle due faccie del taglio si intendano applicate due distribuzioni continue di tensioni, equivalenti alle tensioni elastiche che, prima del taglio, si trasmettevano nell'interno del sistema attraverso alle faccie stesse.

Immaginiamo di far subire alle due faccie del taglio uno spostamento relativo infinitesimo. Il sistema tagliato può, durante una tale variazione di configurazione, a seconda dei casi e specialmente in relazione col grado suo di connessione, comportarsi in due modi ben distinti. Può accadere cioè che lo spostamento relativo anzidetto non richieda per essere realizzato se non semplici moti rigidi (compatibili coi vincoli che, malgrado il taglio, si intendono conservati) del sistema o anche soltanto di qualche sua porzione. Può avvenire invece che un tale spostamento relativo non possa prodursi senza una concomitante deformazione elastica vera e propria del sistema tagliato o almeno di qualche sua parte [1].

Nel primo caso il sistema deve (in vista della piccolezza degli spostamenti), ritenersi in equilibrio nella nuova sua configurazione sotto l'azione delle stesse forze esterne date e delle medesime distribuzioni di tensioni sopra definite. Nel secondo caso invece il sistema, per essere mantenuto in equilibrio nella sua nuova configurazione sotto l'azione delle solite forze esterne, richiede ovviamente una variazione delle dette due distribuzioni di tensioni, variazione che noi riterremo a sua volta infinitesima e tale che su elementi corrispondenti (cioè primitivamente coincidenti) delle due faccie, le tensioni applicate, già eguali e contrarie, si conservino eguali e contrarie.

La variazione di configurazione così definita è in ogni caso da considerarsi come *impossibile* pel sistema dato nel suo insieme; e precisamente è da considerarsi come *incongruente* se il taglio è stato praticato per modo che ne risulti alterato il grado di connessione del sistema, come congruente ma *incompatibile coi vincoli* se si è fatto coincidere il taglio colla superficie di separazione del sistema da uno o da parecchi dei corpi che lo vincolano. Essa variazione è però, nelle ipotesi fatte, evidentemente *equilibrata* nel senso che le componenti di tensione che la caratterizzano, soddisfano alle equazioni generali dell'equilibrio in tutti quei campi, così interni che superficiali, del sistema dato, nei quali la forza esterna è esplicitamente data; ne segue che, mentre nel primo caso l'energia elastica o lavoro di deforma-

[1] Non sarebbe difficile mettere in relazione questa distinzione dei casi possibili in due diverse categorie, con un'altra che, nella Scienza delle Costruzioni è fondamentale. Si potrebbe infatti dimostrare che si verifica la prima ipotesi sempre quando la risultante delle tensioni elastiche che, nel sistema dato, si trasmettono attraverso la sezione considerata, è staticamente determinata. Si avvera per contro la seconda ipotesi ogniqualvolta quella risultante non è suscettibile di esser determinata col solo sussidio delle leggi della statica dei corpi rigidi.

zione Φ si mantiene costante durante la variazione di configurazione, nel secondo essa subisce una variazione positiva infinitesima del secondo ordine [1]. Nell'un caso, come nell'altro, la variazione prima di quell'energia elastica dev'essere nulla:

$$\delta\Phi = 0 .$$

Se pertanto, indicati con:

S lo spazio (connesso) occupato dal sistema,

σ la superficie che lo limita,

σ' e σ'' rispettivamente le due faccie del taglio,

$\Sigma = \sigma + \sigma' + \sigma''$ la superficie totale del sistema tagliato,

F la forza esterna riferita all'unità di massa, e $\mathbf{F}_\sigma$ la pressione riferita alla unità di superficie, agenti nei singoli punti rispettivamente interni e superficiali del sistema,

s lo spostamento di un punto qualunque P del sistema stesso, prodotto dalla ipotetica variazione di configurazione,

si applica a tale variazione di configurazione (da considerarsi come possibile, cioè congruente e compatibile coi vincoli, per quanto non più equilibrata, pel sistema *tagliato* e sollecitato, oltrechè dalle forze esterne esplicitamente date, anche dalle due *primitive* distribuzioni di tensioni sulle due faccie del taglio, riguardate esse pure come forze esterne costanti) il noto principio dei lavori virtuali, si ottiene [2]:

$$\text{(I)} \qquad \int_S \mathbf{F} \times \mathbf{s}\, dS + \int_\Sigma \mathbf{F}_\sigma \times \mathbf{s}\, d\sigma = -\,\delta\Phi = 0$$

[1] Rispetto ad una tale variazione di configurazione l'energia elastica Φ del sistema dato è infatti, in questo secondo caso, minima. Del contrastato rigore di questa proposizione, dovuta com'è noto al Menabrea, io mi sono occupato in una mia recentissima Memoria su *L'equilibrio elastico dal punto di vista energetico* (Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino, serie II, tom. LXII, pag. 479). In quell'occasione ho creduto opportuno escludere dalle mie considerazioni quelle particolari variazioni di configurazione per le quali si annulla, oltre alla prima, anche la variazione seconda dell'energia elastica: cioè addirittura (tenuta presente la natura quadratica della funzione) la sua variazione totale: e ciò malgrado che, nelle applicazioni, della variazione seconda e del suo segno non si tenga notoriamente conto veruno. Rinunziando però ad una tale restrizione, l'equazione (15)

$$\delta\Phi = 0$$

della citata mia Memoria vale in un campo assai più generale di quello allora definito e, pur continuando ad esprimere, nel caso particolare dei stesimi iperstatici, le note leggi dell'equilibrio elastico, viene ad includere in sè, nella sua espressione più generale, la legge fondamentale in base alla quale, per l'equilibrio dei sistemi elastici (siano essi staticamente determinati od iperstatici, poco importa) debbono essere soddisfatte quelle stesse equazioni che regolano l'equilibrio dei sistemi rigidi.

[2] Uso qui le notazioni proposte dai professori C. Burali-Forti e R. Marcolongo, nei loro *Elementi di Calcolo Vettoriale* (Bologna 1909 e Parigi 1910).

ove il secondo integrale equivale alla somma

$$\int_{\sigma} \mathbf{F}_{\sigma} \times \mathbf{s}\, d\sigma + \int_{\sigma'} \mathbf{F}_{\sigma'} \times \mathbf{s}' d\sigma' + \int_{\sigma''} \mathbf{F}_{\sigma''} \times \mathbf{s}'' d\sigma''$$

ovvero anche, visto che in punti corrispondenti di σ' e di σ'' è sempre $\mathbf{F}_{\sigma'} = -\mathbf{F}_{\sigma''}$, all'altra:

$$\int_{\sigma} \mathbf{F}_{\sigma} \times \mathbf{s}\, d\sigma + \int_{\sigma'} \mathbf{F}_{\sigma'} \times (\mathbf{s}' - \mathbf{s}'')\, d\sigma'$$

nella quale compare in evidenza il vettore $\mathbf{s}' - \mathbf{s}''$ spostamento relativo del punto generico della faccia σ' rispetto al punto suo corrispondente sulla faccia σ''.

Nell'ipotesi che le due faccie in questione non abbiano subìto, durante la nota variazione di configurazione, alcuna deformazione (cioè mutamento alcuno di forma nè di dimensioni), ma si siano soltanto spostate nello spazio, il loro moto relativo, per la supposta sua piccolezza, può notoriamente assimilarsi ad un moto elementare elicoidale, cioè può considerarsi come risultante della sovrapposizione di una rotazione elementare di ampiezza ω attorno ad una data retta r come asse, e di una traslazione elementare di ampiezza ε parallelamente a quella medesima retta.

Indicato pertanto con O un punto qualsiasi dell'asse r del moto relativo, e con $\mathbf{k}$ un vettore unitario diretto parallelamente a questo asse, è lecito porre:

$$\mathbf{s}' - \mathbf{s}'' = \varepsilon \mathbf{k} + \omega \mathbf{k} \wedge (P - O);$$

con che la (I) diviene:

$$\text{(II)} \quad \int_{S} \mathbf{F} \times \mathbf{s}\, dS + \int_{\sigma} \mathbf{F}_{\sigma} \times \mathbf{s}\, d\sigma + \varepsilon \mathbf{k} \times \int_{\sigma'} \mathbf{F}_{\sigma'}\, d\sigma' + \omega \mathbf{k} \times \int_{\sigma'} (P - O) \wedge \mathbf{F}_{\sigma'}\, d\sigma' = 0.$$

Noi scriveremo più brevemente:

$$\text{(II')} \quad \int_{S} \mathbf{F} \times \mathbf{s}\, dS + \int_{\sigma} \mathbf{F}_{\sigma} \times \mathbf{s}\, d\sigma + \varepsilon \mathbf{k} \times \mathbf{F}^{*}_{\sigma'} + \omega \mathbf{k} \times \mathbf{M}^{*}_{\sigma'} = 0,$$

indicando con

$$\mathbf{F}^{*}_{\sigma'} = \int_{\sigma'} \mathbf{F}_{\sigma'}\, d\sigma'$$

e con

$$\mathbf{M}^{*}_{\sigma'} = \int_{\sigma'} (P - O) \wedge \mathbf{F}_{\sigma'}\, d\sigma'$$

rispettivamente la risultante delle tensioni elastiche che, nello stato di equilibrio del sistema dato, si trasmettono attraverso il taglio, ed il vettore momento dello stesso sistema di tensioni rispetto al punto O.

Se, come caso particolare, il moto relativo di σ' rispetto a σ'' si riduce ad una semplice traslazione di ampiezza unitaria in direzione negativa

$$(\varepsilon = -1 \, , \omega = 0) \, ,$$

si trova:

$$\text{(III)} \qquad \int_S \mathbf{F} \times \mathbf{s} \, dS + \int_\sigma \mathbf{F}_\sigma \times \mathbf{s} \, d\sigma = \mathbf{k} \times \mathbf{F}^*_{\sigma'} \, .$$

Similmente nell'ipotesi che il moto relativo in questione consti di una semplice rotazione di ampiezza unitaria nel senso delle rotazioni negative

$$(\varepsilon = 0 \, , \omega = -1) \, ,$$

si ottiene:

$$\text{(IV)} \qquad \int_S \mathbf{F} \times \mathbf{s} \, dS + \int_\sigma \mathbf{F}_\sigma \times \mathbf{s} \, d\sigma = \mathbf{k} \times \mathbf{M}^*_{\sigma'} \, .$$

Di qui il teorema:

« La componente secondo una data direzione (ovvero: il momento rispetto ad un dato asse), della forza interna che, in un sistema elastico in « equilibrio sotto l'azione di forze date, si trasmette attraverso ad una data « sezione, è, misurata dal medesimo numero che misura il lavoro che eseguirebbero le dette forze qualora, tagliato il sistema secondo la data « sezione si costringessero le due faccie del taglio ad una traslazione relativa, unitaria e negativa, nella direzione prescelta (ovvero: ad una rotazione relativa, pure unitaria e negativa, attorno all'asse prescelto) [1] ».

Nel campo delle applicazioni ha una speciale importanza il caso particolarissimo in cui il sistema trovasi sollecitato soltanto da un'unica forza esterna **P** che si suppone concentrata e di grandezza unitaria; denotando

[1] Le formole (III) e (IV) e, con esse, l'enunciato che da esse deriva, possono essere ricavate con procedimenti diretti, a volte anche assai semplici, nei varî casi particolari nei quali sono suscettibili di applicazione. E precisamente esse possono dedursi nei casi staticamente determinati, direttamente dalle equazioni generali dell'equilibrio dei sistemi rigidi; un'opportuna applicazione del teorema di Betti condurrà invece ad una dimostrazione valida nei casi iperstatici.

È anzi, a questo proposito, da rilevarsi che precisamente all'uso di ricorrere, a seconda dei casi, all'uno o all'altro di questi procedimenti speciali, devesi attribuire la consueta separazione della teoria dei diagrammi d'influenza delle tensioni elastiche in due parti fra loro indipendenti (e riguardanti l'una gli sforzi staticamente determinati, l'altra i soli sforzi iperstatici), separazione che, solo dal punto di vista didattico, sembra a chi scrive, giustificabile.

allora con $\mathbf{s}_p$ il vettore spostamento del punto d'applicazione P della forza nella solita variazione di configurazione, le (III) e (IV) divengono rispettivamente, a mezzo di un semplice passaggio al limite:

$$\text{(III}') \qquad \mathbf{P} \times \mathbf{s}_p = \mathbf{k} \times \mathbf{F}^*_{\sigma'}$$

e

$$\text{(IV}') \qquad \mathbf{P} \times \mathbf{s}_p = \mathbf{k} \times \mathbf{M}^*_{\sigma'}$$

mentre il teorema sopra enunciato assume la forma:

« La componente secondo una data direzione (ovvero: il momento ri-« spetto ad un dato asse), della forza interna che si trasmette attraverso « ad una data sezione di un sistema elastico in equilibrio sotto l'azione di « una sollecitazione esterna unitaria applicata in un punto generico P in « direzione arbitraria, è eguale alla componente, secondo questa direzione, « dello spostamento che il punto P subirebbe qualora, tagliato il sistema « secondo la data sezione, si costringessero le due faccie del taglio ad una « traslazione relativa, unitaria e negativa, nella direzione prescelta (o rispet-« tivamente: ad una rotazione relativa, pure unitaria e negativa, attorno « all'asse prescelto) ».